

# Planche n° 36. Produit scalaire

\* très facile   \*\* facile   \*\*\* difficulté moyenne   \*\*\*\* difficile  
I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

## Exercice n° 1 : (\*\*\*)

Pour  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $N(A) = \text{Tr}({}^tAA)$ . Montrer que  $N$  est une norme vérifiant de plus  $N(AB) \leq N(A)N(B)$  pour toutes matrices carrées  $A$  et  $B$ .  $N$  est-elle associée à un produit scalaire ?

## Exercice n° 2 : (\*\*\*)

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel de dimension finie. Soit  $\| \cdot \|$  une norme sur  $E$  vérifiant l'identité du parallélogramme, c'est-à-dire :  $\forall (x, y) \in E^2$ ,  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ . On se propose de démontrer que  $\| \cdot \|$  est associée à un produit scalaire.

On définit sur  $E^2$  une application  $f$  par :  $\forall (x, y) \in E^2$ ,  $f(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$ .

- 1) Montrer que pour tout  $(x, y, z)$  de  $E^3$ , on a :  $f(x + z, y) + f(x - z, y) = 2f(x, y)$ .
- 2) Montrer que pour tout  $(x, y)$  de  $E^2$ , on a :  $f(2x, y) = 2f(x, y)$ .
- 3) Montrer que pour tout  $(x, y)$  de  $E^2$  et tout rationnel  $r$ , on a :  $f(rx, y) = rf(x, y)$ .

On admettra que pour tout réel  $\lambda$  et tout  $(x, y)$  de  $E^2$  on a :  $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$  (ce résultat provient de la continuité de  $f$ ).

- 4) Montrer que pour tout  $(u, v, w)$  de  $E^3$ ,  $f(u, w) + f(v, w) = f(u + v, w)$ .
- 5) Montrer que  $f$  est bilinéaire.
- 6) Montrer que  $\| \cdot \|$  est une norme euclidienne.

## Exercice n° 3 : (\*\*IT)

Dans  $\mathbb{R}^4$  muni du produit scalaire usuel, on pose :  $V_1 = (1, 2, -1, 1)$  et  $V_2 = (0, 3, 1, -1)$ .

On pose  $F = \text{Vect}(V_1, V_2)$ . Déterminer une base orthonormale de  $F$  et un système d'équations de  $F^\perp$ .

## Exercice n° 4 : (\*\*\*)

- 1) Soit  $(E, | \cdot |)$  un espace euclidien.
  - a) Soit  $u \in E$ . Montrer que  $x \mapsto u|x$  est une forme linéaire sur  $E$ .
  - b) Soit  $\varphi$  une forme linéaire sur  $E$ . Montrer qu'il existe un vecteur  $u$  de  $E$  et un seul tel que  $\forall x \in E$ ,  $\varphi(x) = u|x$ .
- 2) a) Existe-t-il  $A$  élément de  $\mathbb{R}_n[X]$  tel que  $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,  $P|A = P(0)$  ?  
b) Existe-t-il  $A$  élément de  $\mathbb{R}[X]$  tel que  $\forall P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $P|A = P(0)$  ?

## Exercice n° 5 : (\*\*\*) (Matrices et déterminants de GRAM)

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $p$  sur  $\mathbb{R}$  ( $p \geq 2$ ).

Pour  $(x_1, \dots, x_n)$  donné dans  $E^n$ , on pose  $G(x_1, \dots, x_n) = (x_i|x_j)_{1 \leq i,j \leq n}$  (matrice de GRAM) et  $\gamma(x_1, \dots, x_n) = \det(G(x_1, \dots, x_n))$  (déterminant de GRAM).

- 1) Montrer que  $\text{rg}(G(x_1, \dots, x_n)) = \text{rg}(x_1, \dots, x_n)$ .
- 2) Montrer que  $(x_1, \dots, x_n)$  est liée si et seulement si  $\gamma(x_1, \dots, x_n) = 0$  et que  $(x_1, \dots, x_n)$  est libre si et seulement si  $\gamma(x_1, \dots, x_n) > 0$ .
- 3) On suppose que  $(x_1, \dots, x_n)$  est libre dans  $E$  (et donc  $n \leq p$ ). On pose  $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ .

Pour  $x \in E$ , on note  $p_F(x)$  la projection orthogonale de  $x$  sur  $F$  puis  $d_F(x)$  la distance de  $x$  à  $F$  (c'est-à-dire

$$d_F(x) = \|x - p_F(x)\|). \text{ Montrer que } d_F(x) = \sqrt{\frac{\gamma(x, x_1, \dots, x_n)}{\gamma(x_1, \dots, x_n)}}.$$

## Exercice n° 6 : (\*\*I)

Matrice de la projection orthogonale sur la droite d'équation  $3x = 6y = 2z$  dans la base canonique orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  ainsi que de la symétrie orthogonale par rapport à cette même droite.

De manière générale, matrice de la projection orthogonale sur le vecteur unitaire  $u = (a, b, c)$  et de la projection orthogonale sur le plan d'équation  $ax + by + cz = 0$  dans la base canonique orthonormée de  $\mathbb{R}^3$ .

## Exercice n° 7 : (\*\*\*) (Inégalité de HADAMARD)

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ , espace euclidien de dimension  $n$ .

Montrer que :  $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$ ,  $|\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)| \leq \|x_1\| \times \dots \times \|x_n\|$  en précisant les cas d'égalité.

**Exercice n° 8 : (\*\*\*)**

Existence, unicité et calcul de  $a$  et  $b$  tels que  $\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 dx$  soit minimum (trouver deux démonstrations, une dans la mentalité du lycée et une dans la mentalité maths sup).

**Exercice n° 9 : (\*\*\*)**

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base quelconque de  $E$  euclidien. Soient  $a_1, \dots, a_n$   $n$  réels donnés. Montrer qu'il existe un unique vecteur  $x$  tel que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x|e_i = a_i$ .

**Exercice n° 10 : (\*\*\*\*I)**

Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n \geq 1$ . Une famille de  $p$  vecteurs  $(x_1, \dots, x_p)$  est dite obtusangle si et seulement si pour tout  $(i, j)$  tel que  $i \neq j, x_i|x_j < 0$ . Montrer que l'on a nécessairement  $p \leq n + 1$ .

**Exercice n° 11 : (\*\*\*\*)**

Soit  $P \in \mathbb{R}_3[X]$  tel que  $\int_{-1}^1 P^2(t) dt = 1$ . Montrer que  $\sup\{|P(x)|, |x| \leq 1\} = 2$ . Cas d'égalité?

**Exercice n° 12 : (\*\*)**

Soit  $f$  continue strictement positive sur  $[0, 1]$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^1 f^n(t) dt$ .

Montrer que la suite  $u_n = \frac{I_{n+1}}{I_n}$  est définie et croissante.

**Exercice n° 13 : (\*\*\*\*I)**

Sur  $E = \mathbb{R}_n[X]$ , on pose  $P|Q = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$ .

- 1) Montrer que  $(E, |)$  est un espace euclidien.
- 2) Pour  $p$  entier naturel compris entre 0 et  $n$ , on pose  $L_p = ((X^2 - 1)^p)^{(p)}$ . Montrer que  $\left( \frac{L_p}{\|L_p\|} \right)_{0 \leq p \leq n}$  est l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base canonique de  $E$ . Déterminer  $\|L_p\|$ .

**Exercice n° 14 : (\*\*I)**

Soit  $f$  un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien  $(E, |)$ . Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , stable par  $f$  (c'est-à-dire vérifiant  $f(F) \subset F$ ). Montrer que  $f(F) = F$  et  $f(F^\perp) = F^\perp$ .

**Exercice n° 15 : (\*\*\*)**

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace euclidien  $(E, |)$  de dimension  $n \geq 2$  vérifiant

$$\forall (x, y) \in E^2, (x|y = 0 \Rightarrow f(x)|f(y) = 0)$$

( $f$  est donc un endomorphisme qui conserve l'orthogonalité). Montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  et  $g \in O(E)$  tels que  $f = \lambda g$  ( $f$  est alors la composée d'une homothétie vectorielle et d'une isométrie vectorielle et s'appelle une similitude vectorielle).

**Exercice n° 16 : (\*\*\*\*I)**

Soit  $(E, |)$  un espace euclidien et  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base orthonormée de  $E$ .

- 1) Soit  $p$  une projection. Montrer que :  $p$  est une projection orthogonale  $\Leftrightarrow \forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$ .
- 2) Soit  $p$  un endomorphisme de  $E$ . Soit  $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ .  
Montrer que :  $p$  est une projection orthogonale  $\Leftrightarrow P^2 = P$  et  ${}^tP = P$   
(pour  $\Leftarrow$ , vérifier d'abord que  $\forall (x, y) \in E^2, (p(x)|y) = (x|p(y))$ ).
- 3) Soit  $s$  une symétrie d'un espace euclidien  $(E, |)$ . Montrer que  $s$  est une symétrie orthogonale  $\Leftrightarrow \forall x \in E, \|s(x)\| = \|x\|$ .
- 4) Soit  $s$  un endomorphisme de  $E$ . Soit  $S = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$ .  
Montrer que :  $s$  est une symétrie orthogonale  $\Leftrightarrow S^2 = I_n$  et  ${}^tS = S$ .